Lycée Ali bourgiba ***Bembla*** ***Monastir***	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 03	*Classe : 4ème math* *Durée : 240 minutes* *Date : 07-05-2009* *Prof : M.Yacoubi*

Exercice 1 (Qcm) (3points)

1) Soit a un entier n tel que $a \equiv 16[17]$ alors on a

$a^2-a-2 \equiv 1[17]$ $\quad$ $a^{2009}+a^{2010} \equiv [17]$ $\quad$ $2^{1000} \equiv a[17]$

2) $\lim\limits_{x\to+} x\left(e^{\frac{-1}{x}}-1\right)$ est égale à:

$-\infty$ $\quad$ $+\infty$ $\quad$ -1

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\Re = (o;\vec{i},\vec{j})$

La tangente a la parabole d'équation $y^2-4x=4$ au point A (8,6) a pour équation dans $\Re$:

$y = \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ $\quad$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

Exercice 2 (3 points)

1) Montrer que pour tout entier n les entiers $14n+3$ et $15n+1$ sont premiers entre eux

2) On considère l'équation (E) $87x+31y=2$ ou x et $y \in \mathbb{Z}$

a) Vérifier en utilisant par exemple la question 1) que $87 \wedge 31=1$

Déterminer un couple (u ; v) d'entiers tels que $87u+31v=1$ puis une solution(x_0,y_0) de (E)

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

3) Application :

Déterminer les points de la droite d'équation $87x-31y-2=0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse x est comprise entre 0 et 1000

Exercice 3 (4.5 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points A(8,5,9) ,B(8,11,15) et C (15,-1,-1)

1) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en déduire que les point A,B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale à Pen A

3) Déterminer les coordonnés des points F de la droite Δ tel que le volume de tétraèdre FABC soit égale à $\frac{686}{3}$

4) Soit S=$\{M(x.y,z) \in \xi$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 12z = 0\}$

a) montrer que S et une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

b) Soit S' le sphère de centre I'(26,11 ;18) et de rayon R' =21

Vérifier que le plan P est tangent à la fois à S et à S'

c)Montrer qu'il existe exactement deux homothétie qui transforment S en S' (on précisera les rapports et les centres

Exercice 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=ln(x-1+$\sqrt{x^2 - 2x + 2}$)

1)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f '(x) $= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

b) Montrer que le point I(1,0) est un centre de symétrie de φ_f

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Préciser les branches infinies de φf et tracer φf dans un repère orthonormé $(o;\vec{i},\vec{j})$

2)On pose $I_0 = \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}$ et pour n $\in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n} dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}$

$k = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2}\ dt$

a) Calculer I_0

b) Montrer que $I_0 + I_1 = k$

c) En utilisant une intégration par partie sur I_1 ; Montrer $I_1 + k = 2\sqrt{2}$ en déduire la valeur de I_1

3) Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ $\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{2n+1}$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 5 (4.5 points)

Une boite contient 8 cubes :

1 gros rouge et 3 petites rouges 2 gros verts et 1 petit vert

1 petit jaune

Un enfant choisit au hasard et simultanément trois cubes de la boite (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur)

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible

1) On note A l'événement : obtenir des cubes de couleurs différentes

B l'événement : obtenir au plus un petit cube

a)Calculer la probabilité de A

b) Verifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$

c) Calculer la probabilité de A sachant B

2) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant

a) donner la loi de probabilité de X

b) calculer l'espérance mathématique de X

3) l'enfant répète n fois l'épreuve : tirer simultanément trois cubes de la boite en remettant dans la boite les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.les tirages sont indépendant. On note P_n la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois

a) déterminer P_n en fonction de n.

b) déterminer le plus petite entier n tel que $P_n \geq 0.99$